Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

Semana 2

1. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z = x + iy$):

   a) $\cos(iz) = \cosh(z)$; b) $\operatorname{sen}(iz) = i\operatorname{senh} z$;

   c) $|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = \cosh(2y)$; d) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$;

   e) $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$; f) $\cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z = \cosh(2z)$.

2. Calcule o valor principal (i.e., tomando na função $\log z$ o ângulo correspondente à restrição principal) de:

   a) $\log(-i)$; b) $\log(1-i)$; c) i^i; d) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$.

3. Determine todas as soluções das seguintes equações:

   a) $e^z = 2$ b) $e^{iz} + e^{-iz} + 2 = 0$ c) $\log z = 1 + 2\pi i$ d) $\operatorname{sen}(2z) = 5$

4. Determine o conjunto dos pontos do plano complexo onde as seguintes funções admitem derivada:

   (a) $xy - ix$ (b) $z^2 - 3z$ (c) $z - \bar{z}$ (d) $\overline{e^z}$ (e) $\operatorname{Im}(z^2)$

5. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2i|xy|$.

   (a) Estude a analiticidade de $f(z)$.

   (b) Calcule $f'(z)$ nos pontos onde f é analítica.

6. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são verificadas em $(x,y) = (0,0)$.

   (b) Verifique, utilizando a definição, que $f'(0)$ não existe.

   (c) Porquê que isto não contradiz o Teorema de Cauchy-Riemann?

7. Mostre que se f e $\overline{f}$ são ambas inteiras, então f é constante.

8. Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e defina $A^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in A\}$. Se f é uma função analítica em A mostre que $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$ é uma função analítica em A^*.